Exercice 1 **7pt**

On va démontrer le résultat suivant : si $x > 0$, alors $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - (1 + x)$.
   (a) Calculez g' et étudiez son signe.
   (b) Faites un tableau de variations et justifiez que $g(x)$ atteint son minimum en $x = 0$.
   (c) Étudiez le signe de $g(x)$ en fonction de x.
2. On considère désormais la fonction $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$.
   (a) Montrez que $f'(x) = g(x)$.
   (b) Faire un tableau de variations pour f.
   (c) Calculez $f(0)$ et en déduire le résultat énoncé au début de l'exercice.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{e^x}{x}$.
   Montrez que si $x > 0$, alors $h(x) > \frac{x}{2}$; en déduire que $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
4. On considère la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = x - e^x$.
   Montrez que si $x > 0$, alors $i(x) < -1 - \frac{x^2}{2}$; en déduire que $i(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

Exercice 2*, tiré d'un sujet de bac 2022.* **10pt**

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 0{,}06(-x^2 + 13{,}7x) \text{ et } g(x) = (-0{,}15x + 2{,}2)e^{0{,}2x} - 2{,}2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

x	0	$6{,}85$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$f(6{,}85)$	$\searrow$ $-\infty$

   (a) Justifier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Justifier les variations de la fonction f.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2.
   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (b) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$ on a
   $$g'(x) = (-0{,}03x + 0{,}29)e^{0{,}2x}.$$
   (c) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Exercice 3 **3pt**

Soient a et b deux réels. Si $e^a = 4$ et $e^b = 5$, combien valent e^{a+b}, e^{2a} et e^{-b} ?