Exercice 1 **7pt**

On va démontrer le résultat suivant : si $x > 0$, alors $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - (1 + x)$.
   (a) Calculez g' et étudiez son signe.
   (b) Faites un tableau de variations et justifiez que $g(x)$ atteint son minimum en $x = 0$.
   (c) Étudiez le signe de $g(x)$ en fonction de x.
2. On considère désormais la fonction $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$.
   (a) Montrez que $f'(x) = g(x)$.
   (b) Faire un tableau de variations pour f.
   (c) Calculez $f(0)$ et en déduire le résultat énoncé au début de l'exercice.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{e^x}{x}$.
   Montrez que si $x > 0$, alors $h(x) > \frac{x}{2}$; en déduire que $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
4. On considère la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = x - e^x$.
   Montrez que si $x > 0$, alors $i(x) < -1 - \frac{x^2}{2}$; en déduire que $i(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Corrigé :

1.
   (a) $g'(x) = e^x - 1$, $g'(x) > 0$ ssi $x > 0$ et $g'(x) = 0$ ssi $x = 0$.
   (b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(0) = 0$	$\nearrow$	

   g est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$; sur $]-\infty, +\infty[$, elle atteint donc un minimum en 0 dont la valeur est $g(0) = 0$.
   (c) $g(x) > 0$ ssi $x \neq 0$ et $g(x) = 0$ ssi $x = 0$.
2.
   (a) $f'(x) = e^x - (0 + 1 + \frac{2x}{2}) = g(x)$.
   (b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

.

(c) $f(0) = e^0 - 1 = 0$. Puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, si $x > 0$, alors $f(x)) > f(0)$, autrement dit $e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}) > 0$, d'où $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

3. Si $x > 0$, alors $e^x > 1 + x\frac{x^2}{2} > \frac{x^2}{2}$ puisque $1 + x > 0$; ainsi $h(x) = \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Comme $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on a $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
4. Si $x > 0$, alors $-e^x < -1 - x - \frac{x^2}{2}$; donc $i(x) = e^x - x < -1 - \frac{x^2}{2}$ et comme $-1 - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, on a $i(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Exercice 2, *tiré d'un sujet de bac 2022.* **10pt**

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 0{,}06(-x^2 + 13{,}7x) \text{ et } g(x) = (-0{,}15x + 2{,}2)e^{0{,}2x} - 2{,}2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

x	0	$6{,}85$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$f(6{,}85)$	↘ $-\infty$

(a) Justifier la limite de f en $+\infty$.

(b) Justifier les variations de la fonction f.

(c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2.

(a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

(b) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$ on a

$$g'(x) = (-0{,}03x + 0{,}29)e^{0{,}2x}.$$

(c) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

(d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Corrigé :

1.

(a) $f(x) = -0{,}06x(x - 13{,}7)$. Losque $x \to +\infty$, $-0{,}06x \to -\infty$ et $(x - 13{,}7) \to +\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

(b) $f'(x) = 0{,}06(-2x + 13{,}7)$, donc $f'(x) = 0$ ssi $2x - 13{,}7 = 0$ ssi $x = 6{,}85$, et $f'(x) > 0$ ssi $x > 6{,}85$.

(c) $f(x) = 0$ ssi $-0{,}06x = 0$ ou $x - 13{,}7 = 0$, donc l'équation admet deux solutions, $x = 0$ et $x = 13{,}7$.

2.

(a) Lorsque $x \to +\infty$, $e^{0{,}2x} \to +\infty$ et $-0{,}15x + 2{,}2 \to -\infty$, donc $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

(b) On pose $u(x) = -0{,}15x + 2{,}2$ et $v(x) = e^{0{,}2x}$, alors $u'(x) = -0{,}15$ et $v'(x) = 0{,}2e^{0{,}2x}$, donc $g'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = -0{,}15e^{0{,}2x}+(-0{,}15x+2{,}2)0{,}2e^{0{,}2x} = (-0{,}03x + 0{,}29)e^{0{,}2x}$.

(c) $e^{0{,}2x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $-0{,}03x + 0{,}29 > 0$ ssi $x < \frac{29}{3} = 9 + \frac{1}{3}$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\frac{29}{3}) \simeq 2{,}98$	$\searrow$	$-\infty$

Sur le tableau de variations on voit que $g(x)$ admet un maximum en $x = \frac{29}{3}$, à la calculatrice on trouve $g(\frac{29}{3}) \simeq 2{,}98$.

(d) La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[\frac{29}{3}, +\infty[$. Comme $g(\frac{29}{3}) > 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $x \in [\frac{29}{3}, +\infty[$ tel que $g(x) = 0$. On sait qu'il n'en existe pas sur l'intervalle $]0, \frac{29}{3}[$ car g est srictement croissante sur cet intervalle et que $g(0) = 0$.
Par lecture graphique sur la calculatrice on trouve $x \simeq 13{,}74$.

Exercice 3 **3pt**

Soient a et b deux réels. Si $e^a = 4$ et $e^b = 5$, combien valent e^{a+b}, e^{2a} et e^{-b} ?

Corrigé : $e^{a+b} = e^a e^b = 20$, $e^{2a} = (e^a)^2 = 16$, $e^{-b} = \frac{1}{e^b} = \frac{1}{5}$.