Exercice 1 **5pt**

Soit c un nombre complexe. On cherche à étudier les éventuelles racines carrées de c.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = c$. On pose $m = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
   (a) Montrez que $m^2 = |c|$ et $2\theta \equiv \arg(c)$ modulo 2π.
   (b) En déduire que l'équation $z^2 = c$ admet en général deux solutions complexes.
2. Calculez les nombres complexes dont le carré est égal à -1, à i, et à $-2 + 2i\sqrt{3}$. Donnez leur valeur en forme algébrique et en forme exponentielle.

Corrigé :

1.
   (a) $m^2 = |z|^2 = |z^2| = |c|^2$ et $2\theta = 2\arg(z) \equiv \arg(z^2) \equiv \arg(c) \bmod 2\pi$.
   (b) Ainsi $m^2 = |c|$, comme $m = |z|$ on a $m \geqslant 0$, donc $m = \sqrt{|c|}$; et $2\theta \equiv \arg(c) \bmod 2\pi$, donc $\theta \equiv \frac{\arg(c)}{2} \bmod \pi$, autrement dit $\theta = \frac{\arg(c)}{2}$ ou $\theta = \frac{\arg(c)}{2} + \pi$. Les deux solutions sont donc $\sqrt{|c|}e^{i\frac{\arg(c)}{2}}$ et $\sqrt{|c|}e^{i(\frac{\arg(c)}{2}+\pi)} = \sqrt{|c|}e^{i\frac{\arg(c)}{2}}e^{i\pi} = -\sqrt{|c|}e^{i\frac{\arg(c)}{2}}$, distincte sauf si $c = 0$.
2. $-1 = 1e^{i\pi}$, donc $z^2 = -1$ a pour solutions $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.
   $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z^2 = i$ a pour solutions $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{2}{\sqrt{2}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} - i\frac{2}{\sqrt{2}}$.
   $-2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donc $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ a pour solutions $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ et $2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$.

Exercice 2 **7pt**

1. Justifiez que $P(z) = z^5 - 1$ se factorise par $(z-1)$ et calculez cette factorisation.
2. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Justifiez que $P(\omega) = 0$ et montrez que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
3. Montrez que $\omega^3 = \overline{\omega}^2$ et que $\omega^4 = \overline{\omega}$.
4. Soient $u = \omega + \overline{\omega}$ et $v = \omega^2 + \overline{\omega}^2$. Montrez que $u + v = -1$ et $uv = -1$.
5. Montrez que $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $v = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimez $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
7. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Corrigé :

1. $P(1) = 1^5 - 1 = 0$, donc P se factorise par $(z-1)$, et le calcul donne $P(z) = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.
2. $\omega^5 = e^{i\frac{2\pi}{5}\times 5} = e^{i2\pi} = 1$, ainsi $P(\omega) = 0$ et comme $\omega \neq 1$, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
3. $\omega^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $\overline{\omega}^2 = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$, or $\frac{6\pi}{5} - 2\pi = \frac{-4\pi}{5}$, donc $\omega^3 = \overline{\omega}^2$.
   $\omega^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i(\frac{8\pi}{5} - 2\pi)} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{\omega}$.
4. $u + v = \omega + \overline{\omega} + \omega^2 + \overline{\omega}^2 = \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3 = -1$ d'après la question 2.
   $uv = (\omega + \overline{\omega})(\omega^2 + \overline{\omega}^2) = \omega^3 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^7 = \omega^3 + \omega + \omega^4 + \omega^2 = -1$, car $\omega^5 = 1$.

5. Comme $u+v=-1$ on a $v=-1-u$, on substitue dans $uv=-1$ pour obtenir $u(-1-u)=-1$, autrement dit $u^2+u-1=0$. C'est un polynôme du second degré, on calcule le discriminant, on obtient $u=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. On sait que $u=\omega+\overline{\omega}$, donc $u=2\Re(\omega)=2\cos(\frac{2\pi}{5})>0$ car $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$. On en conclut que $u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et que $\cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{u}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
6. $\cos(2\theta)=\cos(\theta+\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=2\cos^2(\theta)-1$.
7. $\cos(\frac{2\pi}{5})=2\cos^2(\frac{\pi}{5})-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, ainsi $\cos^2(\frac{\pi}{5})=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$. Comme $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, on sait que $\cos(\frac{\pi}{5})>0$, et donc $\cos(\frac{\pi}{5})=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

   Note : $(1+\sqrt{5})^2=6+2\sqrt{5}$, *donc* $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3, *extrait du sujet de bac 2015.* **8pt**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z :

$$z^2-8z+64=0.$$

2. On considère les nombres complexes $a=4+4i\sqrt{3}$, $b=4-4i\sqrt{3}$ et $c=8i$.
   (a) Calculer le module et un argument du nombre a.
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   (c) Placer dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, puis montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

   Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question précédente complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.
3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a'=ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b'=be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c'=ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $b'=8$.
   (b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

   Pour la suite on admet que $a'=-4+4i\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4i$.
4. Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives m et n. Quelle est l'interprétation géométrique du nombre complexe $\frac{m+n}{2}$ et de la quantité $|m-n|$?
   (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Calculez r, s et t.
   (b) Quelle est la nature du triangle RST ?

Corrigé :

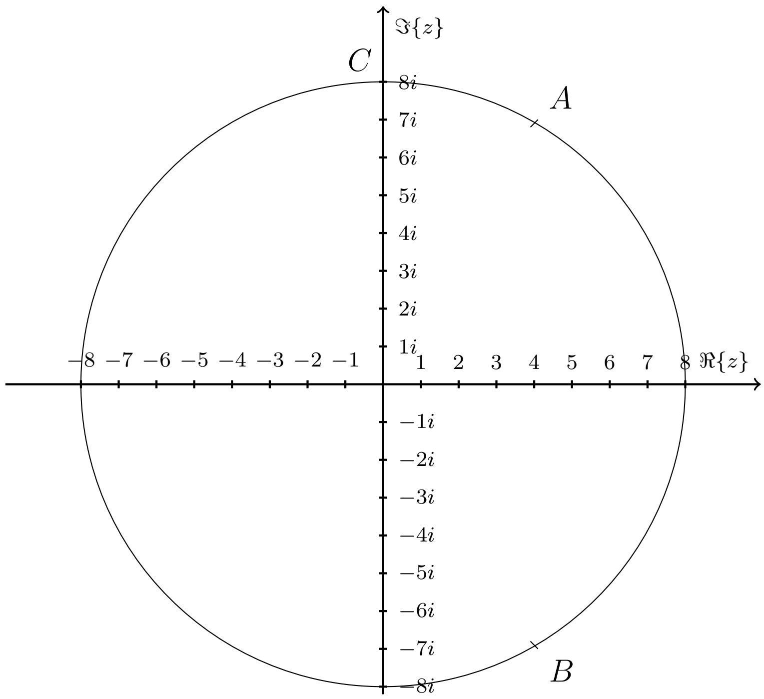
1. $\Delta=64-4\times64=-3\times64<0$, donc il y a deux solutions complexes : $\frac{8\pm i\sqrt{3\times64}}{2}=4\pm i4\sqrt{3}$.

2.

(a) $|a| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$, donc $a = 8(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$; un argument de a est un réel θ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient.

(b) $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ par la question précédente, et $a = \overline{b}$, donc $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(c)



3.

(a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i0} = 8$.

(b) $|a'| = |a| = 8$ et $\arg(a') = \arg(a) + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

4. Le nombre complexe $\frac{m+n}{2}$ est l'affixe du milieu du segment $[MN]$, et la quantité $|m-n|$ est la longueur MN.

(a) $r = \frac{a'+b}{2} = 0$, $s = \frac{b'+c}{2} = 4 + 4i$, $t = \frac{c'+a}{2} = (2 - 2\sqrt{3}) + i(2 + 2\sqrt{3})$.

(b) Sur le dessin, RST semble équilatéral ; on calcule alors les longueurs RS, RT et ST : $RS = |s - r| = |s| = 4\sqrt{2}$, $RT = |t| = 4\sqrt{2}$, $TS = |t - s| = 4\sqrt{2}$, on en conclut que RST est équilatéral.

Exercice 4, *bonus.* **?pt**

Montrez que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Corrigé : Les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. La loi d'addition sur $\mathbb{C}$ est définie par $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$. Comme l'addition dans $\mathbb{R}$ est associative est commutative, elle l'est aussi dans $\mathbb{C}$. $0 + i0$ est l'élément neutre de cette loi et $-a + i(-b)$ est l'inverse de $a + ib$. Ainsi $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe.

On définit le produit externe par un nombre réel : $\lambda \times (a + ib) = (\lambda a) + i(\lambda b)$. Il faut maintenant vérifier que ce produit se distribue sur l'addition, ce qui est immédiat puisque le produit est distributif dans $\mathbb{R}$.

On a prouvé que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La famille $(1, i)$ est une famille libre et génératrice, autrement dit une base, dans $\mathbb{C}$, donc $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.