Exercice 1 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n(x) = x^n e^x$. La fonction f_n est définie, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On souhaite démontrer que $f_n(x)$ converge vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

1. En fonction de si n est pair ou impair, étudiez les variations de la fonction f_n.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n converge vers une valeur réelle quand x tend vers $-\infty$.
3. En utilisant le fait que $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$, conclure que $f_n(x)$ converge vers 0 en $-\infty$.

Corrigé :

1. On a $f_n'(x) = x^n e^x + n x^{n-1} e^x = x^{n-1} e^x (x+n)$. On étudie le signe de chacun des termes de ce produit :
   - $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
   - $(x-n) = 0$ ssi $x = n$, $(x+n) > 0$ ssi $x > -n$.
   - si n est pair, $x^{n-1} \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$; si n est impair, $x^{n-1} \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Quelque soit n, $x^{n-1} = 0$ ssi $x = 0$.

   Enfin, il est clair que $f_n(0) = 0$ pour tout n.

   On trace le tableau de signes et le tableau de variations, d'abord pour n pair :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
$x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
x^{n-1}		$-$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$f_n(-n)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   puis pour n impair :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
$x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
x^{n-1}		$+$		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\searrow$	$f_n(-n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

2. Pour n pair, sur l'intervalle $]-\infty, -n[$, $f_n(x) > 0$ et f_n est croissante ; ainsi, lorsque x tend vers $-\infty$, $f_n(x)$ converge forcément vers une valeur réelle, nommons-la l_n. Pour n impair, l'argument est similaire, mais f_n est décroissante et négative sur l'intervalle $]-\infty, -n[$.
3. Supposons que $l_n \neq 0$. Étudions alors la limite de $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$: informellement, $xf_n(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} (-\infty)l_n$, donc $f_{n+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \pm\infty$, puisque $l_n \neq 0$. Mais on a montré que la limite de f_{n+1} et $l_{n+1} \neq \pm\infty$! Ainsi, notre hypothèse est absurde ; autrement dit, $l_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on étudie désormais la fonction $g_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$. La fonction g_n est définie, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On souhaite montrer que $g_n(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrez que $\frac{1}{g_n(x)} = (-1)^n f_n(-x)$.
2. Quelle est la limite de $f_n(-x)$ quand x tend vers $+\infty$?
3. En déduire la limite de $\frac{1}{g_n(x)}$ puis de $g_n(x)$ en $+\infty$.

Corrigé :

1. $(-1)^n f_n(-x) = (-1)^n(-x)^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{g_n(x)}$.
2. La limite de $f_n(-x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, qui est, d'après l'exercice précédent, 0.
3. $\frac{1}{g_n(x)} = (-1)^n f_n(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, or, $g_n(x) > 0$ pour $x > 0$; donc $g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2 :

On souhaite calculer des valeurs approximatives de l'exponentielle. On va utiliser l'approximation de f par sa dérivée.

1. Soit f une fonction dérivable en a. Expliquez pourquoi pour h très petit, $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$.

2. En déduire que $e^h \simeq 1 + h$ pour h très petit.
3. Soit $a > 0$, on pose $h = \frac{a}{n}$ pour un très grand n. En déduire $e^a \simeq (1 + \frac{a}{n})^n$.
4. Quelles sont les trois premières décimales de e ?

Corrigé :

1. Par définition de la dérivée, $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Donc, lorsque h est très petit, $f'(a) \simeq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, d'où le résultat.
2. Il s'agit de l'inégalité précédente avec $f(x) = e^x$ et $a = 0$: $e^h = e^{0+h} \simeq e^0 + he^0 = 1 + h$.
3. On a $e^a = (e^h)^n \simeq (1 + h)^n = (1 + \frac{a}{n})^n$.
4. En prenant $a = 1$ et $n = 10000$, on calcule $e \simeq (1{,}0001)^{1}0000 \simeq 2{,}718$.