Travaux Dirigés

Continuité et dérivabilité

LLG 2023-24

Exercice 1 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrez que f_0 est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais discontinue en 0.
2. Montrez que f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas dérivable en 0.
3. Montrez que f_2 est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.
4. Montrez que f_3 est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Fixons n. On considère les fonctions $u : x \to x^n$, $v : x \to \frac{1}{x}$ et $w : x \to \sin(x)$. v est continue sur $\mathbb{R}^*$ et w est continue sur $\mathbb{R}$, donc leur composée $w \circ v$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. u est continue sur $\mathbb{R}$, donc le produit $u \times (w \circ v)$ est continu sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ quelque soit n. Le même argument montre que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Le fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}^*$ par l'argument ci-dessus. On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$. On a $f_0(u_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et la suite $(f_0(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 ; or $f_0(0) = 0 \neq 1$, donc f_0 n'est pas continue en 0.
2. La fonction f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après l'argument ci-dessus. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0, on souhaite montrer que $(f_1(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f_1(0) = 0$. Si $u_n = 0$, alors $f_1(u_n) = 0$, et en particulier $-|u_n| \leqslant f_1(u_n) \leqslant |u_n|$. Si $u_n \neq 0$, $f_1(u_n) = u_n \sin(\frac{1}{u_n})$, et comme $\sin(x) \in [-1, 1]$ pour tout x, on a $-|u_n| \leqslant f_1(u_n) \leqslant |u_n|$. D'après le théorème des gendarmes, $(f_1(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, et donc f_1 est continue en 0.

   On considère désormais le taux de variation de f_1 en 0 :

   $$\frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \frac{h \sin(\frac{1}{h})}{h} = \sin(\tfrac{1}{h}).$$

   Ce taux de variation n'a pas de limite quand h tend vers 0, donc la fonction f_1 n'est pas dérivable en 0.
3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_2(x) = x f_1(x)$. Comme f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, f_2 est continue sur $\mathbb{R}$. De même f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On considère le taux de variation de f_2 en 0 :

   $$\frac{f_2(0+h) - f_2(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = h \sin(\tfrac{1}{h}).$$

   Ce taux de variation tend vers 0 quand h tend vers 0, donc f_2 est dérivable en 0 et on a :

   $$f_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Un argument similaire à la question 1 montre que f_2' n'est pas continue en 0.

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_3(x) = xf_2(x)$. Comme f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, f_3 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$f_3'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Un argument similaire à la question 2 montre que la fonction $x \to x\cos(\frac{1}{x})$ est continue en 0 et donc que f_3' est continue en 0.

Exercice 2 :

Démontrez qu'il existe deux points antipodaux (diamétralement opposées) de l'équateur où il fait la même température. Explicitez vos hypothèses.

Corrigé : On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à x la température à l'équateur la longitude x (mesurée en degrée, modulo 360). On suppose que la fonction T est continue car elle représente une grandeur physique.

On considère la fonction f définie par $f(x) = T(x) - T(x + 180)$, la différence de température entre le point de longitude x et son point antipodal. On veut montrer que f s'annule en un point. Si $f(0) = 0$, c'est fait. Sinon, comme $f(0) = -f(180)$, si l'un des deux est strictement positif, l'autre est srtictement négatif. Comme f est continue, il existe $x \in [0, 180]$ tel que $f(x) = 0$.