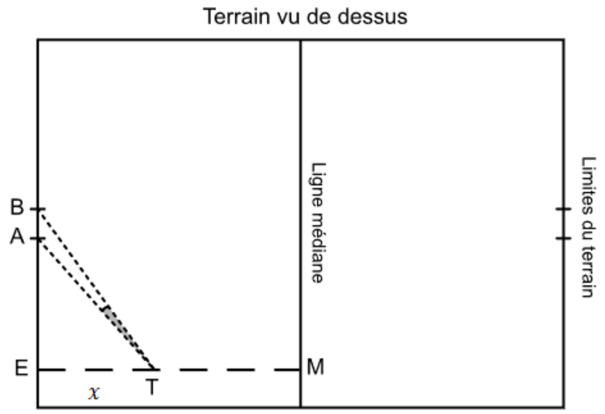
Exercice 1 : *tiré d'un sujet de bac 2016.* **10pt**

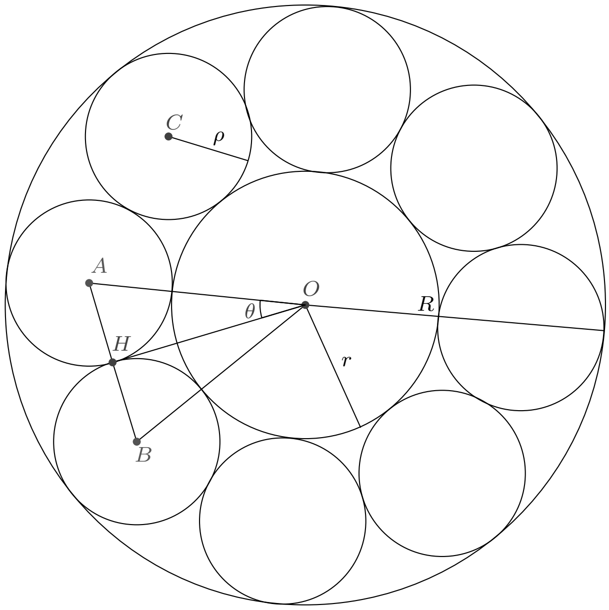


Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.
Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer. Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50\,\text{m}$, $EA = 25\,\text{m}$ et $AB = 5{,}6\,\text{m}$. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x.
2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\frac{\pi}{2}[$. La fonction tan est-elle paire ou impaire ?
3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$$
4. En déduire :
$$\tan(\gamma) = \frac{5{,}6x}{x^2 + 765}$$
5. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale.
Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$. Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Exercice 2 : *Chaînes de Steiner.* **10pt**



Une chaîne de Steiner est composée de deux cercles concentriques, appelés cercles intérieur et extérieur, et d'une chaîne de n cercles de même rayon, tangents au cercle intérieur, au cercle extérieur, et à chacun de leurs deux voisins.
Sur la figure ci-contre, on a représenté une chaîne de Steiner avec $n = 8$. Le point O est le centre des deux cerlces concentrique. On note R le rayon du cercle extérieur, r le rayon du cercle intérieur, et ρ le rayon de chacun des cercles de la chaîne.
Les points A et B sont les centres de deux cercles consécutifs de la chaîne, H est le milieu du segment $[AB]$, et θ est la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$.

1. Justifier que $R = r + 2\rho$ et que $\theta = \frac{\pi}{n}$.
2. Montrer que $\sin(\theta) = \frac{\rho}{r+\rho}$. En déduire $\rho = \frac{r\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}$.
3. Montrer finalement la formule de Steiner :

$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sin(\theta)}{1-\sin(\theta)}$$

4. On trace deux cercles concentriques de rayon $r = 1$ et $R = 3\sqrt{2}$. Peut-on construire une chaîne de Steiner entre ces deux cercles ? Avec combien de cercles ?
5. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $\sin(\frac{\pi}{20})$ à 10^{-2} près. Pour tracer une chaîne de Steiner avec $n = 20$ cercles et avec $R = 1$, quel sera le rayon r du cercle intérieur ?