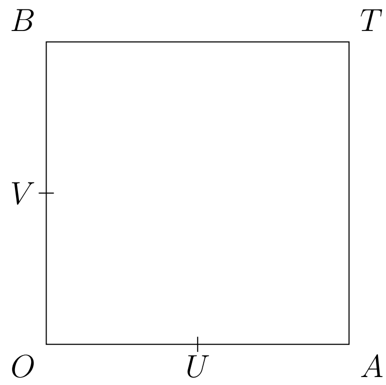
Exercice 1 **10pt**



Sur la figure ci-contre, $(O, \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$ forment un repère orthonormé, U est le milieu de $[OA]$, V le milieu de $[OB]$, et $BOAT$ est un carré.

1. (a) Justifier que (BU) est la droite d'équation $2x + y = 2$.
   (b) Donner une équation cartésienne de la droite (TV).
   (c) Déterminer les coordonnées de S, leur point d'intersection.
2. Soit (d) la droite perpendiculaire à (TV) passant par A.
   (a) Donner un vecteur normal à (d).
   (b) En déduire une équation cartésienne de (d).
   (c) Donner les coordonnées de P, le point d'intersection de (d) et (TV).
3. Soit (d') la droite parallèle à (TV) passant par O.
   (a) Donner un vecteur normal à (d').
   (b) En déduire une équation cartésienne de (d').
   (c) Vérifier que les points $H\colon (\frac{4}{5}\ ;\frac{2}{5})$ et $I\colon (\frac{8}{5}\ ;\frac{4}{5})$ sont sur la droite (d').
4. (a) Montrer par le calcul que $\overrightarrow{BU} \cdot \overrightarrow{TV} = 0$ et $\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{HP} = 0$.
   (b) En déduire que $SHIP$ est un carré, puis montrer que l'aire de $BOAT$ est cinq fois l'aire de $SHIP$.

Exercice 2 : *Inversion circulaire.* **5pt**

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
2. Soit $P\colon (a\ ; b)$ un point tel que $a^2 + b^2 > 1$. Est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathcal{C}$?
3. Donner une équation vectorielle du cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre OP.
4. Soient M et N les points d'intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Montrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$ et $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$.
5. Soit P' le milieu de $[MN]$. Exprimer $\overrightarrow{OP'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, puis montrer que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = 1$.

Exercice 3 **5pt**

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $F\colon (0\ ; 1)$.

Décrire l'ensemble des points $M\colon (x\ ; y)$ qui satisfont l'équation $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OF} = ||\overrightarrow{FM}||$.

Exercice 4 : *Bonus.*

Nous sommes 40 dans cette salle de classe.

1. Quelle est la probabilité que l'un·e d'entre nous fête son anniversaire aujourd'hui ?
2. Quelle est la probabilité que deux d'entre nous fêtent leur anniversaire aujourd'hui ?
3. Sachant qu'au moins une personne dans cette classe fête son anniversaire aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes fêtent leur anniversaire aujourd'hui ?
4. Combien de personnes faut-il au minimum dans une salle pour que la probabilité que deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour soit $>50\%$?