Exercice 1, *tiré d'un sujet de bac 2015.* **6pt**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-2x}$.

1. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = (\frac{x}{e^x})^2$. Conjecturer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
5. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2e^{-x}$. Calculer $g'(x)$ et montrer que sur $]2, +\infty]$, g est décroissante et positive. On en déduit que g converge vers une valeur réelle positive ou nulle lorsque x tend vers l'infini.
6. En déduire que $\frac{g(x)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 2, *La loi des sinus.* **3pt**

On considère un triangle ABC, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, ainsi que $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$.

1. Soit H le projeté orthogonal de A sur BC, on note $h = AH$. Exprimer h en fonction de $\sin(\beta)$ et en fonction de $\sin(\gamma)$.
2. En déduire $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.
3. En déduire la loi des sinus : $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Exercice 3 **3pt**

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont paires ? Lesquelles sont impaires ? Lesquelles sont périodiques ?

1. $f(x) = e^{(x^2)}\cos(x)$
2. $g(x) = e^x - e^{-x}$
3. $h(x) = \sin(x) + e^{\sin(2x)}$

Exercice 4, *Ptolémée et le pentagone.* **8pt**

1. On se place dans un repère orthonormé d'origine O. Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < \pi$ et soient A et B les points correspondants sur le cercle trigonométrique. Soient C et D les points de coordonnées respectives $(-1\,;0)$ et $(1\,;0)$.
   (a) On considère les triangle OAB. Soit H le milieu de $[AB]$. Montrer que $\widehat{HOB} = \frac{\beta-\alpha}{2}$ et en déduire que la longueur AB est égale à $2\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})$.
   (b) Exprimer de même les longueurs BC, CD, AD, AC et BD.
   (c) Montrer que $\frac{AB\times CD}{4} = \sin(\frac{\beta-\alpha}{2})$, $\frac{AD\times BC}{4} = \sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2})$ et $\frac{AC\times BD}{4} = \cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2})$.
   (d) En déduire la formule de Ptolémée dans ce cas :

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

2. On admet la formule de Ptolémée dans un cas plus général : si A, B, C et D sont quatre points sur cercle trigonométrique dans cet ordre, alors

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Soit A, B, C, D et E les points correspondants du cercle trigonométriques correspondants respectivement aux réels 0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$.

(a) Tracer la figure et justifier que $ABCDE$ est un pentagone régulier, on notera $a = AB$ la longueur de son côté.

(b) On note $d = AC$ la longueur d'une diagonale de $ABCDE$. En utilisant la formule de Ptolémée, montrer que $d^2 - ad - a^2 = 0$.

(c) On note φ l'unique solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Montrer que $x = a\varphi$ est solution de l'équation $x^2 - ax - a^2 = 0$. Donner la valeur exacte de φ.

(d) Soit H le milieu de $[AC]$. En considérant le triangle AHB, et en justifiant toutes vos étapes, montrer que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et en déduire la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{5})$.