Devoir Maison

Séries

1^er^ mars 2024

Exercice 1 :

On cherche à étudier la suite (T_n) telle que $T_0 = 0$ et $T_{n+1} = T_n + n + 1$. Autrement dit :

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

1. Les nombres T_n s'appellent les nombres triangulaires, pouvez-vous expliquer pourquoi ?
2. On va montrer informellement que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tout d'abord, on écrit deux fois T_n :

$$\begin{array}{rccccccccl} T_n = & 1 & + & 2 & + \cdots + & n-1 & + & n & & \\ & n & + & n-1 & + \cdots + & 2 & + & 1 & = T_n \end{array}$$

   Utilisez cette écriture pour "démontrer" que $T_n + T_n = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1)$, et donc que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. On va démontrer rigoureusement la formule "$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$" par récurrence.
   (a) Montrer d'abord que la formule est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (b) On suppose que pour un certain n, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrez que $T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
4. Une rumeur (probablement fausse) raconte qu'un professeur de maths du 18^ème^ siècle, un jour qu'il était peu inspiré, donna à ses élèves un contrôle surprise : calculez la somme de tous les entiers de 1 à 100. Il pensait que les élèves prendraient toute l'heure pour le faire à la main – les calculatrices n'existaient pas –, mais Carl Friedrich Gauss a rendu sa copie en à peine quelques minutes, ayant démontré de lui-même la formule que vous venez de voir. À votre tour, calculez T_{100}, et impressionnez votre professeur.

Exercice 2 :

On cherche à étudier la suite (H_n) définie par $H_0 = 0$ et $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$. Autrement dit :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. La suite (H_n) est-elle croissante ou décroissante ?
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un entier m tel que $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$. On introduit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = 2^m$.
   (a) Écrire les 10 premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrer que $\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{n}$.
3. On considère la suite (h_n) définie par $h_0 = 0$ et $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{u_{n+1}}$.
   (a) Montrer que $H_n \geqslant h_n$.
   (b) Montrer que pour $n = 2^m$, $h_n = \frac{m+1}{2}$. En déduire $h_n \to +\infty$.
   (c) Quel est le comportement (convergence, divergence) de la suite H_n ?

   La suite (H_n) s'appelle la série harmonique. La preuve de sa divergence que nous venons de voir provient de Nicole Oresme, savant du 14^ème^ siècle, à qui l'on doit aussi une des premières tentatives de gamme tempérée.

Devoir Maison

Séries

1er mars 2024

Exercice 3 :

On cherche à étudier la suite (B_n) telle que $B_0 = 0$ et $B_{n+1} = B_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. Autrement dit :

$$B_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. La suite (B_n) est-elle croissante ou décroissante ?
2. On consière la suite (b_n) définie par $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, et pour $n \geqslant 2$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)}$.
   (a) Montrer que $b_n \geqslant B_n$.
   (b) Montrer pour $n \geqslant 1$ que $b_n = 2 - \frac{1}{n}$.
   (c) En déduire que $B_n < 2$ et que (B_n) converge vers une valeur $\leqslant 2$.

La convergence de (B_n) est connue depuis au moins le 17ème siècle, mais c'est autrement plus difficile de déterminer sa limite. Cette question est connue comme "le problème de Bâle", du nom de la ville allemande où Jakob Bernoulli a posé cette question. Leonhard Euler a été le premier à découvrir que $\lim(B_n) = \frac{\pi^2}{6}$ dans les années 1730.
Un siècle plus tard, Bernhard Riemann généralise les travaux d'Euler et étudie toutes les séries du type $Z_0(s) = 0$, $Z_{n+1}(s) = Z_n(s) + \frac{1}{n^s}$. La fonction Zeta définie par $\zeta(s) = \lim Z_n(s)$ est aujourd'hui au cœur de nombreuses questions encore non résolues, notamment, la résolution de l'équation $\zeta(s) = 0$ est mise à prix, avec une récompense est fixée à un million de dollars.